ECOLE NATIONALE DU GENIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG

CONCOURS D'ENTREE 1993

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATHEMATIQUES

DUREE : 3 heures.

N.B. : *Ce sujet comporte 3 pages de texte.*

Dans tout le problème, l'abréviation v.a. signifie : variable aléatoire réelle.

A

Dans ce paragraphe A, X et Y désignent deux v.a. indépendantes suivant la même loi géométrique définie par :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $Pr(X = k) = qp^k$.

(p donné, $p \in]0,1[$, $q = 1-p$).

1. a. Calculer les probabilités $Pr(X + Y \leq 0)$, $Pr(X - Y \leq 0)$.

   b. Les événements $(X + Y \leq 0)$ et $(X - Y \leq 0)$ sont-ils indépendants ?

   c. Calculer les probabilités : $Pr(X < Y)$, $Pr(Y < X)$ et $Pr(X = Y)$.

2. Déterminer la loi de la v.a. X-Y, son espérance et sa variance.

B

I. Soient X et Y deux v.a. indépendantes suivant la loi normale d'espérance 0 et variance 1.

   1. Calculer la covariance du couple $(X + aY, X + bY)$ (a,b réels donnés) puis le coefficient de corrélation linéaire de ce couple.

   2. On pose $S = X + Y$, $D = X - Y$.

      a. Déterminer la loi des v.a. S et D et expliciter une fonction de densité de S et de D.

      b. Calculer les probabilités $Pr(S \leq 0)$ et $Pr(D \leq 0)$.

3. a. Donner l'expression d'une fonction de densité continue f du couple (X,Y), puis calculer la probabilité $Pr\Big((S \leq 0) \text{ et } (D \leq 0)\Big)$.

   b. Montrer que les événements $(S \leq 0)$ et $(D \leq 0)$ sont indépendants.

4. On veut calculer une fonction de densité continue φ du couple (S,D) par deux méthodes différentes :

   a. <u>1ère méthode</u> basée sur le lemme suivant qu'on utilisera sans démonstration :

   Lemme 1 | Soit F une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $(t,u,h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}_+^*)^2$ fixé, et $R(h_1,h_2)$ le domaine limité par un rectangle, ayant un sommet au point (t,u), dont les côtés restent parallèles à des directions fixes et sont de longueur h_1 et h_2 Alors

   $$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{R(h_1,h_2)} F(x,y)\,dx\,dy = F(t,u).$$

   Soit $(t,u,h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}_+^*)^2$.

   Dessiner le domaine $\Delta = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; t<x+y<t+h_1 \text{ et } u<x-y<u+h_2\Big\}$.

   Exprimer la probabilité $Pr\Big((t<S<t+h_1) \text{ et } (u<D<u+h_2)\Big)$ au moyen d'une intégrale double portant sur le domaine Δ. En déduire la valeur de φ en utilisant le Lemme 1.

   b. <u>2ème méthode</u> : Exprimer $\phi(t,u) = Pr\Big((S<t) \text{ et } (D<u)\Big)$ sous forme d'une intégrale double portant sur la fonction f.

   Calculer $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial u}(t,u)$.

   On utilisera sans démonstration le résultat suivant :

   <u>Lemme 2</u> $\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(t,u) = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t\ \partial u}(t,u)$.

   Retrouver ainsi l'expression de φ trouvée en 4.a.

   c. Montrer que les v.a. S et D sont indépendantes.

II. Dans cette partie II, on cherche à établir une réciproque partielle du I sous la forme du Théorème suivant :

<u>Théorème (T)</u> : | Soient X et Y deux v.a. indépendantes telles que les v.a. S = X+Y et D = X-Y sont aussi indépendantes. On suppose que les quatre v.a. X, Y, X+Y, X-Y admettent des fonctions de densité (notées respectivement f_1, f_2, g_1, g_2) de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et strictement positives. Alors les v.a. X et Y suivent des lois normales .

1. a. En s'inspirant d'une des méthodes données au I.4., montrer que le couple (S,D) admet une fonction de densité de la forme
   $(t,u) \longrightarrow \frac{1}{2} f_1\left(\frac{t+u}{2}\right) f_2\left(\frac{t-u}{2}\right)$.

   b. Transcrire l'hypothèse de (T) en une relation entre les quatre fonctions f_i, g_i (i = 1, 2).

2. a. On pose : $\varphi_i = \ln f_i$ et $\psi_i = \ln g_i$ (i = 1, 2).
   Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_1(x) + \varphi_2(y) = k + \psi_1(x+y) + \psi_2(x-y)$
   (k constante à calculer).

   b. Montrer que les fonctions φ_1 et φ_2 sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. (On étudiera les dérivées secondes φ_1'' et φ_2'').

3. Soit $q(x) = ax^2 + bx + c$.
   Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pour que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{q(x)}\,dx$ converge. Calculer alors cette intégrale.

4. Terminer la démonstration du théorème (T).